指数・対数・三角関数

指数関数と対数関数が互いに逆関数であることを利用した置き換え

置き換え 1： $\boldsymbol{x=\log_a a^x}$

$$x \underset{\log_a y}{\overset{a^x}{\rightleftarrows}} y$$

より， $y=a^x$， $x=\log_a y$

よって，

$x=\log_a a^x$

これはよく見かける置き換えであり，なんてことはない。

大事なのは，置き換え 2 である。

置き換え 2： $\boldsymbol{x=a^{\log_a x}}$

$$x \underset{a^y}{\overset{\log_a x}{\rightleftarrows}} y$$

より， $y=\log_a x$， $x=a^y$

よって， $x=a^{\log_a x}$

特に数学Ⅲの積分において，この置き換えは重要である。

例

$p=a^{\log_a p}$

$p=e^{\log p}$

$p^q=a^{\log_a p^q}=a^{q\log_a p}$

$p^q=e^{\log p^q}=e^{q\log p}$

指数の大小

x, y は 1 でない正数とする。

1．指数が有理数の場合

例：$x^{\frac{a}{b}}$ と $y^{\frac{c}{d}}$ の大小

手順 1

指数を通分してから，指数の値を揃える。

$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$，$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$ より，$x^{\frac{a}{b}}=x^{\frac{ad}{bd}}=\left(x^{ad}\right)^{\frac{1}{bd}}$，$y^{\frac{c}{d}}=y^{\frac{bc}{bd}}=\left(y^{bc}\right)^{\frac{1}{bd}}$

手順 2

x^{ad} と y^{bc} の大小関係から，$\left(x^{ad}\right)^{\frac{1}{bd}}$ と $\left(y^{bc}\right)^{\frac{1}{bd}}$ の大小関係を求める。

（$t=s^{\frac{1}{bd}}$ のグラフの概形を描き大小関係を調べると楽）

2．指数が無理数の場合

無理数指数を大小関係を調べる上で有効な有理数ではさみ，

有理数指数の大小関係にもっていく。

例：$x^{\sqrt{a}}$ と $y^{\sqrt{b}}$ の大小

たとえば，$p<\sqrt{a}<q$，$r<\sqrt{b}<s$ とすると，

$1<x$，$1<y$ のとき

$x^p<x^{\sqrt{a}}<x^q$，$y^r<y^{\sqrt{b}}<y^s$ であり，$x^q<y^r \Rightarrow x^{\sqrt{a}}<y^{\sqrt{b}}$

$0<x<1$，$0<y<1$ のとき

$x^p>x^{\sqrt{a}}>x^q$，$y^r>y^{\sqrt{b}}>y^s$ であり，$x^p<y^s \Rightarrow x^{\sqrt{a}}<y^{\sqrt{b}}$

対数の大小

対数の底をそろえ，真数の大小を調べる。

$\log_a p<\log_a q<\log_a r$ において，

$0<a<1$ のとき $p>q>r$，$1<a$ のとき $p<q<r$ となることに注意する。

例題 6　対数不等式

（イ）

解答補足

$\dfrac{(t-1)(t-2)}{t} \leq 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t-2) \leq 0$ （$t \neq 0$）　$\therefore t < 0$，$1 \leq t \leq 2$

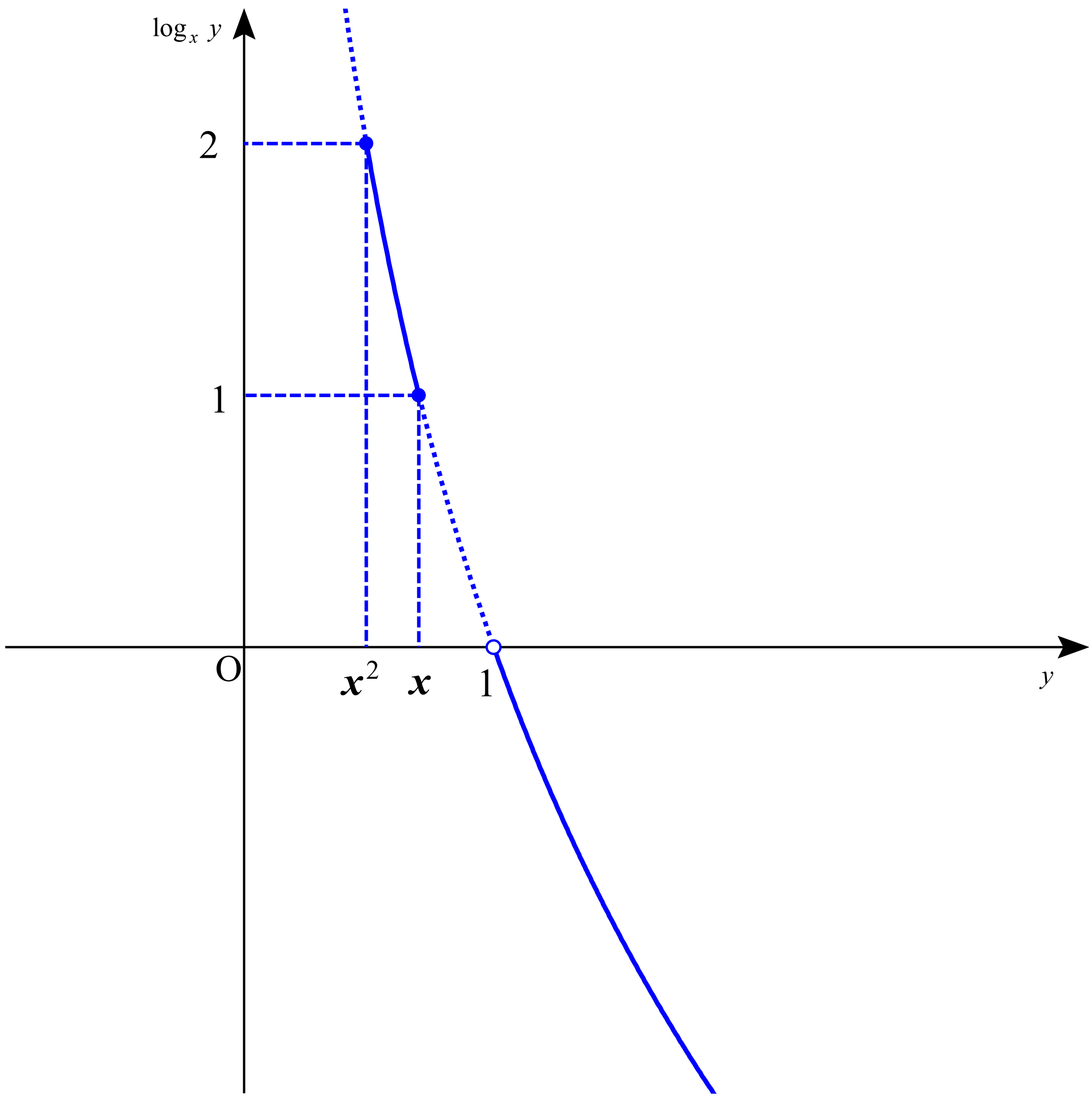
よって，$\log_x y < 0$，$1 \leq \log_x y \leq 2$

$0 < x < 1$ のとき

$\log_x y$ は単調に減少するから，

$\log_x y < 0$ ならば $y > 1$

$1 \leq \log_x y \leq 2$ ならば $x^2 \leq y \leq x$

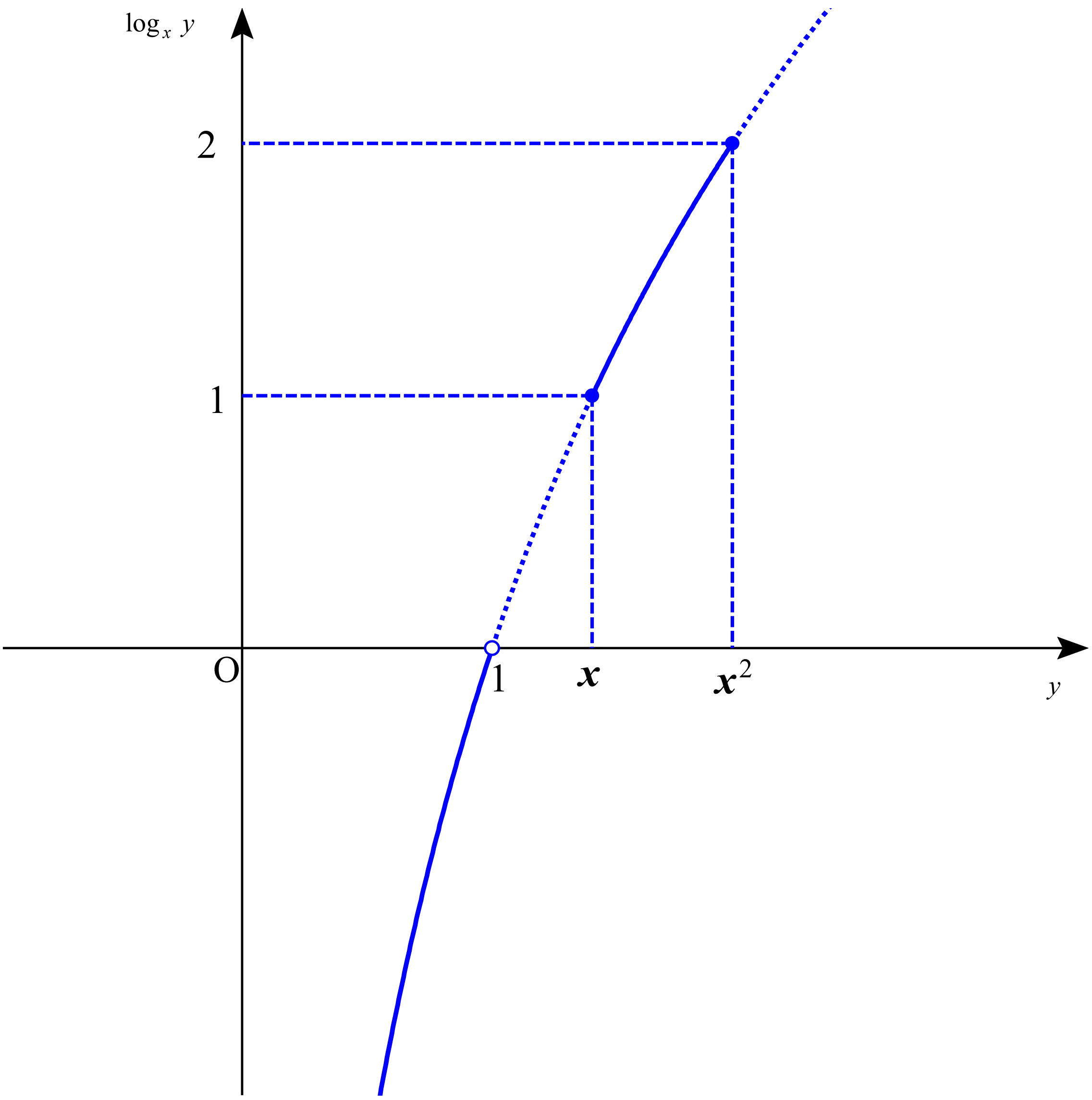


$1<x$ のとき

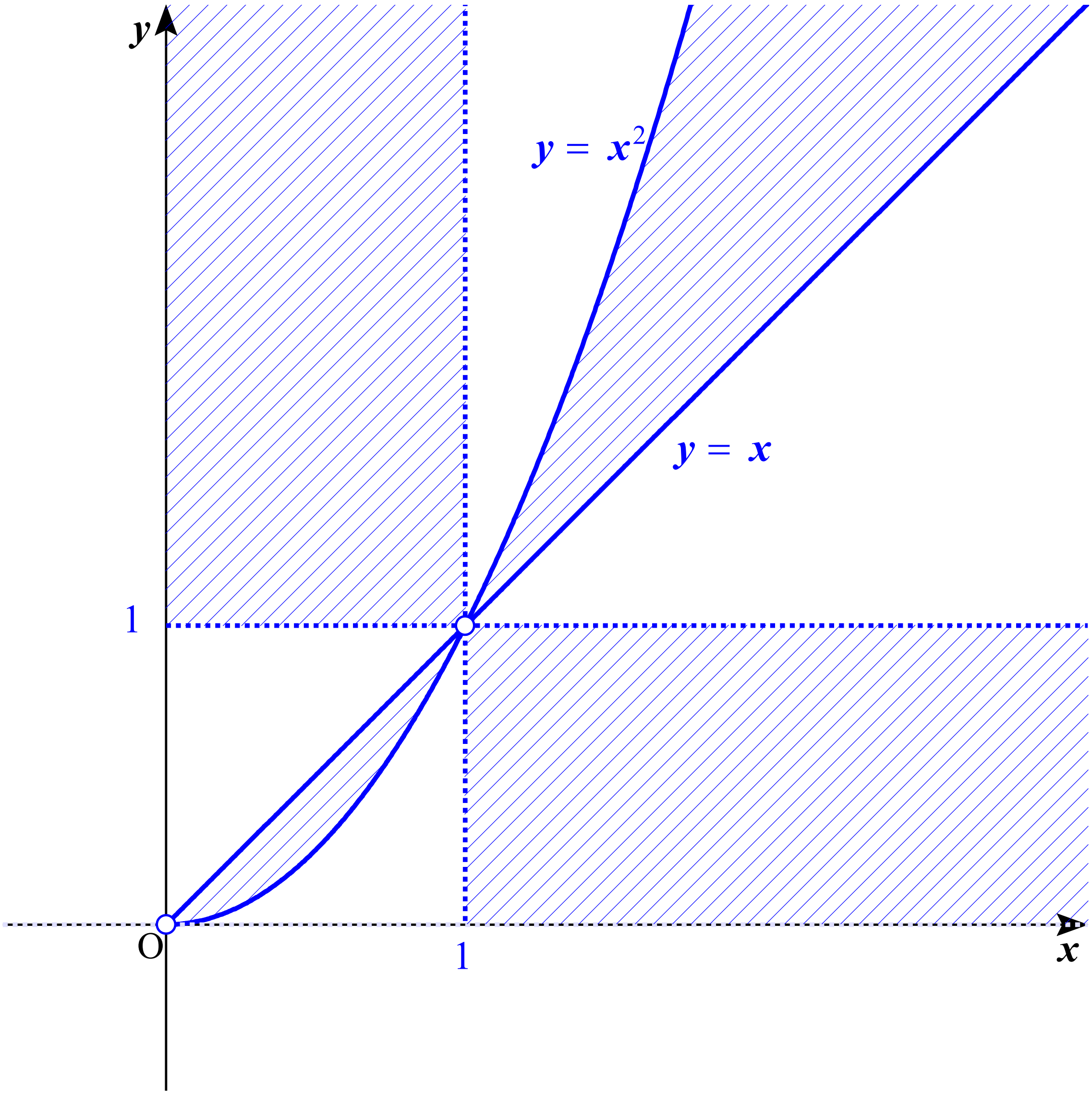
$\log_x y$ は単調に増加するから，

$\log_x y<0$ ならば $0<y<1$

$1 \leq \log_x y \leq 2$ ならば $x \leq y \leq x^2$



以上より，点(x, y)の存在する領域を図示すると，下図の斜線部と実線部となる。



例題 11　三角方程式・不等式

（ア）

解法 1

与式より，$2\cos\theta = 1+\sin\theta$

両辺を 2 乗して，$4\cos^2\theta = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1$

$\therefore 4(1-\sin^2\theta) = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1$

$\therefore 5\sin^2\theta + 2\sin\theta - 3 = 0$

$\therefore \sin\theta = -1, \dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = -1$ のとき

与式より $\cos\theta = 0$ であり，これは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を満たす。

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき

与式より $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ であり，これは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を満たす。

よって，$(\cos\theta, \sin\theta) = (0,-1), \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

解法 2

$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ とおくと，

与式より，$2x - y = 1$　・・・①

また，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，$x^2 + y^2 = 1$　・・・②

①かつ②より，$(x, y) = (0,-1), \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

ゆえに，$(\cos\theta, \sin\theta) = (0,-1), \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

（イ）

解答補足

$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ とおくと，

与式より，$y \geq |x|$

また，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，$x^2 + y^2 = 1$

別解

$y = \sin\theta$ と $y = |\cos\theta|$ のグラフの概形から求める。

（エ）

別解

$$\begin{aligned}\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta s &= (\sin\theta+\sin 3\theta)+\sin 2\theta\\ &= 2\sin 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\\ &= \sin 2\theta(2\cos\theta+1)\\ &= 2\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$\cos\theta=x$， $\sin\theta=y$ とおくと，

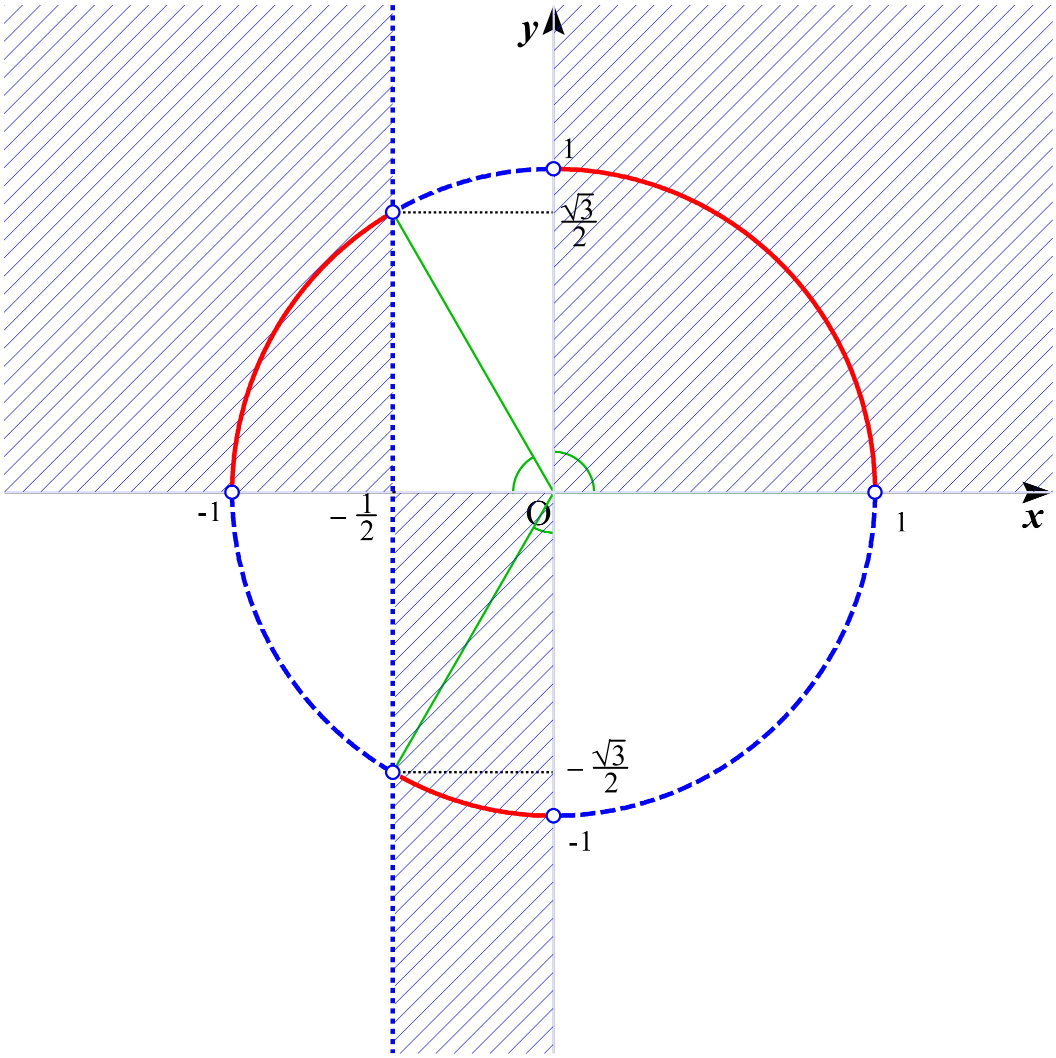
$2\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta+1)>0$ より， $2xy(2x+1)>0$

よって， $xy>0$ かつ $2x+1>0$ または $xy<0$ かつ $2x+1<0$ ・・・①

また， $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より， $x^2+y^2=1$ ・・・②

①，②を xy 座標平面上に表すと，赤色実線上の点は①かつ②を満たすことがわかる。

よって， $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$， $\dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$



12　三角方程式・不等式

（ア）

$\cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ より， $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \sin\dfrac{7}{8}\pi$　　$\therefore \theta = \pm\dfrac{3}{8}\pi + 2n\pi$ （n は整数）